**שאלה 1:**

אי אפשר פשוט לשרשר את המסלולים באופן שמוצג בשאלה (מסלול מu לw שתחילתו מסלול u-v והמשכו מסלול v-w) ולקבל מסלול מu לw, כיוון שבסדרה שנוצרת ע"י שרשור כזה עלולה להופיע קשת מE יותר מפעם אחת (במקרה שאותה הקשת הופיעה הן בPu-v והן בPv-w היא תופיע פעמיים בשרשור המסלולים) ולפי הגדרת מסלול כל קשת מE צריכה להופיע לכל היותר פעם אחת.

**שאלה 2:**

1. הגרף G בשאלה הוא גרף קשיר (אסתמך על פתרון הממ"ח ולכן לא אוכיח).

לפי משפט 3.1 בעמוד 35 בחוברת של תורת הגרפים, גרף G קשיר הוא אוילרי אם"ם דרגת כל צומת בו היא זוגית. עפ"י שאלה 2 בממ"ח יודעים שדרגת כל צומת ב-G היא 18 ולכן זוגית. לכן לפי משפת 3.1 גרף G בשאלה הזאת הוא אוילרי.

עפ"י ההגדרה: גרף הוא אוילרי אם"ם יש בו מעגל אוילר. כיוון שכך בגרף בשאלה יש מעגל אוילר.

**תשובה**:

יש בגרף בשאלה מעגל אוילר.

1. לפי משפט דירק(משפט 3.3 עמ' 42):

יהי גרף פשוט על צמתים. אם הדרגה של כל צומת היא לפחות , אז G הוא המילטוני.

מספר הצמתים בגרף בשאלה הוא (כזכור מממ"ח 5 שאלה 2) ולכן גדול או שווה מ3. הגרף גם פשוט כי:

כל הקשתות שיש בגרף הן בין צמתים שונים זה מזה ולכן אין קשת בגרף שמחברת צומת לעצמו ולכן אין לולאות. כמו כן אין קשתות מקבילות כי אם חיתוך שתי הצמתים ריק או גדול מ1 (כל אחד מין הצמתים הוא קבוצה ולכן פעולת החיתוך מוגדרת עליהם) מספר האיברים בחיוך שלהם לא 1 ולכן אין קשת ביניהם (אפילו לא אחת), ואם החיתוך ביניהם הוא 1 יש בינם קשת אחת בדיוק ולכן אין 2 קשתות שונות המחברות אותם (אניח בשלילה שיש 2 קשתות שונות שמחברות בינם לכן יש בינם לא קשת אחת בדיוק =><= מש"ל).

כיוון שכך המשפט מתאים לגרף בשאלה. דרגת כל צומת בגרף בשאלה היא 18 (השתמשתי בנתון זה משאלה 2 בממ"ח גם בסעיף א').כיוון ש דרגת כל צומת היא גדולה ממספר הצמתים בשאלה חלקי 2 ולכן עפ"י משפט דירק הגרף בשאלה הוא המילטוני.

עפ"י ההגדרה: גרף הוא המילטוני אם"ם יש בו מעגל המילטון. כיוון שכך וכיוון שקיבלתי שהגרף בשאלה הוא המילטוני, בגרף בשאלה יש מעגל המילטון.

**תשובה**:

יש בגרף בשאלה מעגל המילטון.

**שאלה 3:**

1. כיוון שיש התאמה חח"ע ועל בין קבוצת הזיווגים המושלמים ב לבין קבוצת החלוקות של 6 איברים שונים זה מזה ל3 תאים בגודל 2 שאין הבחנה ביניהם(ההתאמה הבאה היא כזאת: יהי זיווג מושלם ב, בו ניבחר קשת כלשהי וממנה נקח את 2 הצמתים שאליהם היא מגיע ונחבר ביחד בקבוצה אחת, כיוון שזהו זיווג אין בוא עוד קשת שסמוכה לאחד מ2 הצמתים הללו ולכן כל יתר הקשתות סמוכות לצמתים אחרים ואפשר "לשים את הקשת הזאת עם הצמתים שאליה היא סמוכה "בצד" ולהמשיך לקשת כלשהי הבאה בתור ואחריה לקשת השלישית ושלושת הקבוצות בנות 2 איברים שקיבלנו זוהי החלוקה ל3 קבוצות בנות 2 איברים כל אחת ללא חשיבות לסדר שההתאמה מתאימה לאיבר הזה מקבוצת הזיווגים המושלמים ב; זוהי התאמה חח"ע ועל ולכן יש התאמה כזאת), כמות הזיווגים המושלמים ב היא ככמות החלוקות של 6 איברים שונים זה מזה ל3 תאים בגודל 2 שאין הבחנה ביניהם. לכן כמות הזיווגים המושלמים ב היא:

**תשובה**:

כמות הזיווגים המושלמים ב היא 15.

1. גם פה יש התאמה חח"ע ועל בין קבוצת כל הזיווגים המושלמים שיש בגרף הדו צדדי המלא (אסמן לשם נוחות את הקבוצה הזאת בA) לבין קבוצה אחרת שאת כמות האיברים בא אנחנו כבר יודעים, הקבוצה היא מספר הסידורים האפשריים של 6 איברים בשורה שאסמן בB (ההצדקה לכך שיש התאמה כזאת היא ההתאמה הבאה: בוחרים סדר מסויים עבור האיברים בקבוצה העליונה וסדר מסויים עבור האיברים בקבוצה התחתונה; ההתאמה החח"ע ועל היא עבור האיבר הראשון בקבוצה העליונה להתאים את האיבר מהקבוצה התחתונה שיש בינם קשת, ויש אחד כזה בדיוק כי אם נניח בדרך השלילה שיש לא אחד אז יש או יותר מ1 או אפס ואם יש יותר מ1 אז זהו לא זיווג ואם יש 0 אז זהו לא זיווג מושלם כי יש צומת שאותה הוא לא מזווג ולכן לא כל הצמתים בגרף מזווגים על ידו, אחריו לאיבר השני בקבוצה העליונה את האיבר בתחתונה שיש בינם קשת וכן הלאה ובסופו של דבר כל התוצאות הללו רשומות בשורה הוא האיבר בB שמותאם לאיבר הזה בA). לכן מספר הזיווגים המושלמים שיש בגרף הדו צדדי המלא הוא 6!.

**תשובה:**

מספר הזיווגים המושלמים שיש בגרף הדו צדדי המלא הוא 6!.

1. יש גם בסעיף זה התאמה חח"ע ועל מהקבוצה של כל הזיווגים המושלמים שיש בגרף שהתקבל ממחיקת 4 הקשתות שסמוכות לצומת שנבחרה לבין הקבוצה של כל תוצאות הניסוי המורכב הבא: בחירת אחד מ2 הצמתים, שיש בינם לבין האיבר הנבחר שמחקו קשתות שסמוכות אליו, בשלב הראשון ובשלב השני סידור יתר האיברים בשורה בדומה לנעשה בסעיף ב'. לניסוי המורחב יש תוצאות, לפי עקרון הכפל, ולכן יש 240 זיווגים מושלמים בגרף שקיבלנו.

**תשובה:**

יש 240 זיווגים מושלמים בגרף שקיבלנו.

**שאלהה 4:**

1. תהי צומת v בV. אסמן את קבוצת כל הצמתים שיש קשת בינם לבין הצומת v בA (ומכיוון שזהו גרף פשוט מספר הצמתים שיש קשת בינם לבין v הוא גם מספר הקשתות שסמוכות לv ועל כן דרגת v היא גודל A עפ"י הגדרה של דרגה).

בין הקבוצה A לבין קבוצת כל הבחירות של 2 מקומות מה4 מקומות בסדרה v יש התאמה חח"ע ועל(ההתאמה היא: לכל צומת u בA ההתאמה מתאימה את 2 המקומות בu שבהם u וv נבדלים; יהי u בA, לכן בין u לv יש קשת ולפי הגדרת הקשתות בשאלה יש בין u לv הבדל בדיוק ב2 מקומות, לכן זוהי התאמה מA לקבוצת כל הבחירות של 2 מקומות מה4 מקומות בסדרה v). גודל קבוצת כל הבחירות של 2 מקומות מה4 מקומות בסדרה v הוא .

לכן דרגת v היא 6.

**תשובה:**

דרגת כל צומת בG היא 6.

1. **אשתמש בשאלה בטענת עזר הבאה:**

כאשר מחוברת צומת v בשאלה, שלה 3 אחדים ו0 אחד או 1 אחד ו3 אפסים, לצומת אחרת u כלשהי ע"י קשת, אז בu יש 3 אחדים ו0 אחד או 1 אחד ו3 אפסים.

**הוכחת טענת העזר:**

אם בv יש 3 אחדים ואפס אחד, אז ב2 המקומות שבהם u שונה מv יש בv או 2 אחדים או 1 אחד ו0 אחד. אם יש 2 אחדים בv ב2 מקומות שבהם v נבדל מu, אז בu יש 3 אפסים ואחד 1. אם יש 1 אחד ואפס 1 בv ב2 מקומות שבהם v נבדל מu אז בu יש 3 אפסים ואחד 1 אז בu יש שלוש אחדים ו0 אחד. לכן בu יש 3 אפסים ואחד 1 או שלוש אחדים ו0 אחד.

אם ב יש שלוש אפסים ו1 אחד אז אעשה ניתוח דומה לניתוח שעשיתי עבור המקרה שבv יש 3 אחדים ואפס אחד הבא: אם ב2 המקומות שבהם נבדל מ יש 2 אפסים אז ב יש 3 אחדים ו0 אחד; אם ב2 המקומות שבהם נבדל מ יש באחד 0 ובשני 1(לאו דווקא בסדר הזה) אז ב יש 1 אחד ו3 אפסים**.** לכן בu יש 3 אפסים ואחד 1 או שלוש אחדים ו0 אחד.

בגלל שבכל אחד מ2 המקרים ברישא של הטענה מתקבל שבu יש 3 אפסים ואחד 1 או שלוש אחדים ו0 אחד הטענה נכונה.

**הוכחה שG אינו קשיר:**

אניח בדרך השלילה שG קשיר. לכן, עפ"י הגדרת הקשירות, יש מסלול בG בין כל 2 צמתים ולכן יש בו מסלול בין 1110 לבין 0011 (אילו צמתים בגרף כי הם סדרות באורך 4 שכל איבריהם לקוחים מהקבוצה ). יהי מסלול בין 1110 לבין 0011. בין 1110 לבין יש קשת ועפ"י הגדרת הקשות בשאלה (בין 2 צמתים יש קשת אמ"מ הם נבדלים זה מזה בדיוק ב2 מקומות) 1110 ו- נבדלים בדיוק ב2 מקומות (ומאותה הסיבה גם ו נבדלים בדיוק ב2 מקומות לכל i מ2 ועד k כאשר ). כיוון ש ב1110 יש 3 אחדים ואפס אחד הטענה "ב1110 יש או 3 אחדים ואפס אחד או 3 אפסים ואחד אחד" נכונה ולכן עפ"י טענת העזר מקבלים שב יש או 3 אחדים ואפס אחד או 3 אפסים ואחד אחד. אותו הטיעון נכון עבור ולכן ב יש או 3 אחדים ואפס אחד או 3 אפסים ואחד אחד כך גם עבור וכן הלאה עד . קבלתי שב יש או 3 אחדים ואפס אחד או 3 אפסים ואחד אחד ומצד שני רואים בבירור שב0011 יש 2 אחדים ו2 אפסים ולכן 2 הדיסיונקטים שגויים ולכן גם הדיסיונקציה שגויה ושלילתה אמת וזאת סתירה, ולכן הנחת השלילה הייתה שגויה **ולכן G אינו קשיר, מש"ל**.

1. לפי משפט 1.6 בעמוד 14 גרף G בעל 2 צמתים לפחות הוא דו צדדי אם"ם אין בוא מעגל באורך אי זוגי. הגרף בשאלה הוא בעל 16 צמתים ולכן ולכן בעל 2 צמתים לפחות והמישפט לכן מתאים לגרף זה. אראה שיש מעגל באורך אי זוג ועל כן הגרף בשאלה לא דו צדדי עפ"י משפט 1.6 שציטטתי:

בין 0001 לבין 0010 יש קשת(המקומות שבהם הם נבדלים הם 1 ו2), בין 0010 ל1011 יש קשת(המקומות שבהם הם נבדלים הם 1 ו4), וגם בין 1011 ל0001 יש קשת (המקומות שבהם הם נבדלים הם 2 ו4). 0001-0010-1011-0001 הוא מעגל כי:

1. צומתי הקצה זהים
2. זו סדרה שמתחילה ונגמרת בצמתים ובין כל2 צמתים יש קשת אחת; כל קשת מחברת בין הצומת הבא בסדרה לקודמו; אין קשת שמופיע יותר מפעם אחת לכן כל הקשתות מופיעות פעם אחת לכל היותר. זוהי הגדרה של מסלול(ובצירוף 1 זהו מסלול עם צמתי קצה זהים ולכן מעגל).

כיוון שזהו מעגל באורך אי זוגי יש בגרף מעגל באורך אי זוגי **ולכן הגרף אינו דו צדדי, מש"ל**.

1. עפ"י מסקנה 5.5 בעמוד 60: בכל גרף מישורי פשוט יש צומת שדרגתה קטנה או שווה ל5.

אניח בשלילה שהגרף G בשאלה הוא מישורי. הגרף פשוט ולכן עפ"י מסקנה 5.5 יש בG צומת שדרגתה קטנה או שווה ל5. כיוון שדרגת כל צומת בG היא 6 אין בG צומת שדרגתה קטנה או שווה מ5 וזאת סתירה ולכן הנחת השלילה הייתה שגויה, **כלומר הגרף G בשאלה אינו מישורי מש"ל.**

**שאלה 5:**

1. יהיו צמתים שלהם מותאמת אותה סדרה של אותיות.

לכל טבעי, במקום i בסדרה (הספירה משמאל בסדרה) המותאמת לובסדרה המותאמת ליש אותה אות (שהרי זאת אותה הסדרה) ולכן v וw שייכים לאותה קבוצה Ai או Bi לכל i טבעי מ1 עד 5. לכן לכל i טבעי מ1 כלל עד 5 כלל אין קשת בין לבGi. לכן לא קיים i טבעי מ1 כלל עד חמש כלל שעבורו יש קשת בין ל ולכן אין קשת בין ל באיחוד חמשת הקבוצות של הקשתות של גרפים G1,…G5, כלומר אין קשת בין v לw בG, מש"ל.

1. אצבע כל צומת בסדרת האותיות שמותאמת לו לפי ההתאמה מסעיף א'.

בקבוצת הצבעים(קבוצת כל הסדרות באורך 5 של האותיות A וB) יש צבעים: *5 אותיות ושני אפשרויות לכל אות.*

*הטענה שהוכחתי בסעיף א' שקולה לטענה:*

אם יש קשת בין v לw בG *אז ל* מותאמות סדרות שונות של אותיות. לצורך נוחות אקרא לה "טענה שקולה".

בעזרת הטענה הזאת אוכיח שהצביע שהגדרתי היא צביעה נאותה:

יהיו צמתים סמוכים בG, לכן יש קשת בין v לw בG. מהטענה השקולה נובע ש*ל* מותאמות סדרות שונות של אותיות ולכן ליש צבעים שונים.

קבלתי כי כל 2 צמתים סמוכים בG צבועים בצבעים שונים וזה אומר שהצביע נאותה (עפ"י ההגדרה).

הראתי שזאת צביעה נאותה של G ב32 צבעים ולכן מספר הצביע של G אינו יותר מ32.

1. אגדיר 5 גרפים דו צדדים על קבוצה V, שאגדיר בהמשך, ואיחודם של חמשת הגרפים יהיה .

אגדיר את V להיות קבוצת כל הבצקים השונים עם 5 פרמטרים שלהם 2 אפשרויות לכל אחד. הפרמטרים ואפשרויותיהם הם הבאים:

שמרים: עם או בלי

סוכר: עם או בלי

ביצים: עם או בלי

עשוי לבצק עלים: עשוי או לא עשוי

שומן: מרגרינה או חמאה

כעת אגדיר את חמשת הגרפים הדו צדדים:

אגדיר את גרף G כאיחוד חמשת הגרפים הנ"ל. G הוא איחוד של 5 גרפים דו צדדים שונים על V והוא גרף מלא על 32 צמתים. כידוע ממשפט ברוקס ( משפט 6.2 עמוד 66) גרף שהוא גרף מלא על n צמתים מספר הצביע שלו הוא n ולכן מספר הצביעה של G הוא 32, מש"ל.